Příklad 1. Určete asymptoty grafu funkce $y = \dfrac{x-5}{x-2}$.

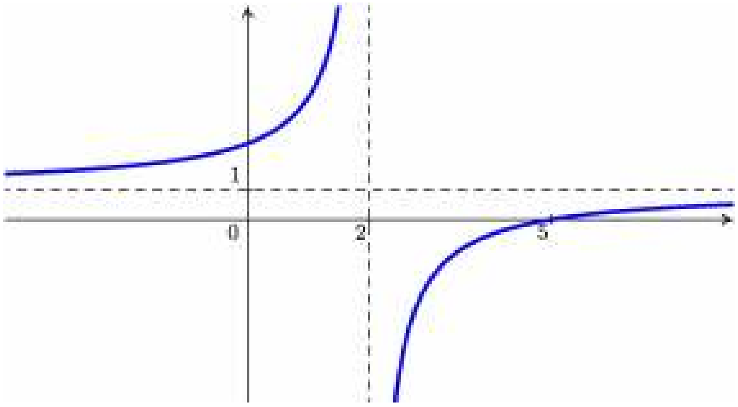
Řešení: $D_f = R - \{2\}$

a) bez směrnice:

Nejdříve zjistíme chování funkce v okolí bodu $x = 2$:

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-5}{x-2} = \left\| \dfrac{-3}{0^+} \right\| = -\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x-5}{x-2} = \left\| \dfrac{-3}{0^-} \right\| = +\infty$.

Funkce má v bodě $x = 2$ nevlastní limitu zprava i zleva, takže přímka $x = 2$ je asymptotou. Viz náčrtek.



b) se směrnicí:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x-5}{x-2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-5}{x(x-2)} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x-2} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - k \cdot x \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x-5}{x-2} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x-5}{x-2} = 1$$

Stejně pro $x \to -\infty$. Tedy asymptotou je přímka $y = 1$ pro $x \to \pm\infty$. Viz náčrtek.

Poznámka: U funkcí racionálních lomených probíhá výpočet příslušných limit stejně pro $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. Proto se někdy zapisuje současně $x \to \pm\infty$. U jiných typů funkcí se musí tyto dva případy řešit zvlášť.

Příklad 2. Určete asymptoty grafu funkce $y = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Řešení: $D_f = R - \{0\}$

a) bez směrnice:

Nejdříve zjistíme chování funkce v okolí bodu, kde funkce není definovaná, $x = 0$:

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = \left\| \dfrac{1}{0^+} \right\| = +\infty$, $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = \left\| \dfrac{1}{0^-} \right\| = -\infty$.

Funkce má v bodě $x=0$ nevlastní limitu zprava i zleva, takže přímka $x=0$ (tj. osa y) je asymptotou grafu.

b) se směrnicí: $y = kx + q$

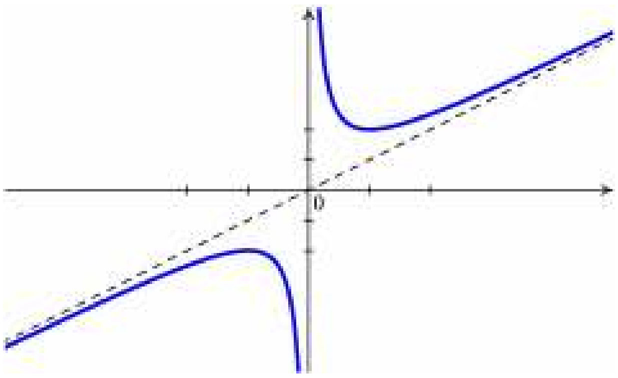
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\|.$$

Tuto limitu můžeme řešit pomocí l'Hospitalova pravidla nebo úpravou nebo na základě věty o limitě racionální lomené funkce v nevlastních bodech. Podle této věty $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x^0 = 1$.

$$q = \lim_{x\to\infty} [f(x) - k \cdot x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{x} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Stejně pro $x \to -\infty$.

Tedy asymptotou je přímka $y = x$ pro $x \to \pm\infty$.



Příklad 3. Určete asymptoty grafu funkce $y = \frac{x}{(x+3)^2}$.

Řešení: $D_f = R - \{-3\}$

a) bez směrnice:

Nejdříve zjistíme chování funkce v okolí bodu $x=0$:

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x}{(x+3)^2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty, \quad \lim_{x\to -3^-} \frac{x}{(x+3)^2} = \left\| \frac{-3}{0^+} \right\| = -\infty.$$

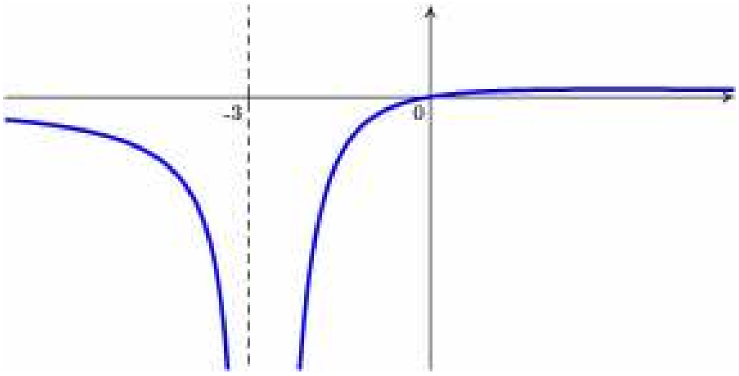
Funkce má v bodě $x=-3$ nevlastní limitu zprava i zleva, takže přímka $x=-3$ je asymptotou grafu.

b) se směrnicí: $y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{(x+3)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+3)^2} = 0.$$

$q = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - k \cdot x] = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x}{(x+3)^2} - 0 \cdot x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{(x+3)^2} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$. Použijeme-li l'Hospitalovo pravidlo (derivujeme zvlášť čitatele a zvlášť jmenovatele), dostaneme $= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2(x+3)} = 0$.

Stejně pro $x \to -\infty$.
Tedy asymptotou je přímka $y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.



Příklad 4. Určete asymptoty grafu funkce $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

Řešení: $D_f = R - \{-1,1\}$

a) bez směrnice:

Zjistíme chování funkce v okolí obou bodů, ve kterých funkce není definovaná.

Pro $x = -1$: $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{2x}{1-x^2} = \left\|\frac{-2}{0^+}\right\| = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-}\frac{2x}{1-x^2} = \left\|\frac{-2}{0^-}\right\| = +\infty$.
Funkce má v tomto bodě nevlastní limitu zprava i zleva, takže přímka $x = -1$ je asymptotou grafu.

Pro $x = 1$: $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x}{1-x^2} = \left\|\frac{2}{0^-}\right\| = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x}{1-x^2} = \left\|\frac{2}{0^+}\right\| = +\infty$.
V bodě $x = 1$ má funkce také nevlastní limitu zprava i zleva, tedy i přímka $x = 1$ je asymptotou grafu.

(Funkce má dvě asymptoty bez směrnice.)

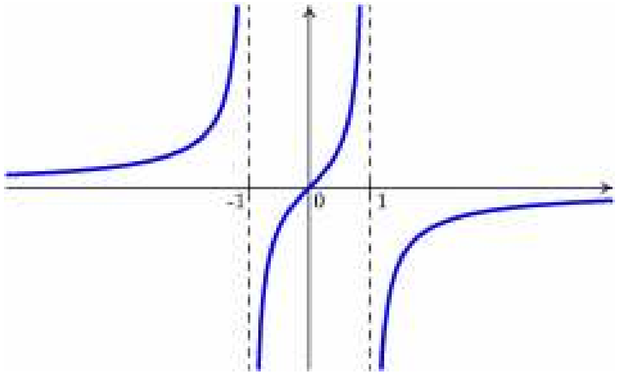
b) se směrnicí: $y = kx + q$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x(1-x^2)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-x^2} = 0.$$

$$q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - k \cdot x] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x}{1-x^2} - 0 \cdot x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1-x^2} = \left\|\frac{\infty}{-\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{-2x} = 0.$$

Výpočet pro $x \to -\infty$ je stejný.

Tedy asymptotou je přímka $y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.



Příklad 5. Určete asymptoty grafu funkce $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

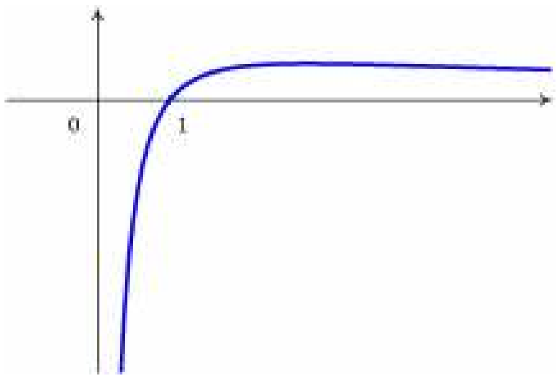
Řešení: $D_f = (0, \infty)$

a) bez směrnice:

Protože asymptoty bez směrnice může mít funkce v bodech nespojitosti nebo v krajních bodech D_f, může mít zadaná funkce takovou asymptotu pouze v $x = 0$, pokud zde bude mít nevlastní limitu. Řešíme jen zprava, zleva nemá smysl.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \left\| \frac{-\infty}{0} \right\| = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \left\| -\infty \cdot \infty \right\| = -\infty$$

Přímka $x = 0$, tj. osa *y*, je asymptotou grafu dané funkce pro $x \to 0^+$. Viz náčrtek.



b) se směrnicí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - k \cdot x \right] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 0 \cdot x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Tedy asymptotou pro $x \to +\infty$ je přímka $y = 0$. Pro $x \to -\infty$ nemá výpočet smysl s ohledem na definiční obor funkce. Viz náčrtek.

Příklad 6. Určete asymptoty grafu funkce $y = \mathrm{e}^x(1-2x)$.

Řešení: $D_f = R$

a) bez směrnice: nemá, protože funkce je definovaná pro všechna $x \in R$.

b) se směrnicí:

Budeme počítat koeficienty přímky $y = kx + q$ zvlášť pro $x \to +\infty$ a potom pro $x \to -\infty$.

$$k_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x(1-2x)}{x} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^x(1-2x) + \mathrm{e}^x(-2)}{1} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x(-1-2x) = -\infty .$$

To znamená, že pro $x \to +\infty$ funkce asymptotu nemá.

Ale $k_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x(1-2x)}{x} = \left\| \dfrac{0\cdot(-\infty)}{-\infty} \right\|$

využijeme tedy vlastnosti limity a potom na druhou z limit l'Hospitalovo pravidlo

$$= \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{1} = 0\cdot(-2) = 0 .$$

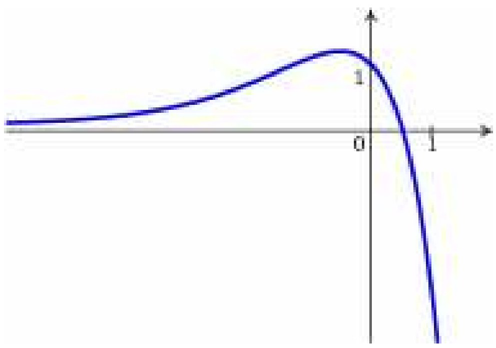
Pro $x \to -\infty$ by tedy funkce asymptotu mít mohla, zbývá vypočítat koeficient q_2 .

$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - k\cdot x] = \lim_{x\to-\infty} [\mathrm{e}^x(1-2x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to-\infty} [\mathrm{e}^x(1-2x)] = \| 0\cdot\infty \|$$

upravíme součin na podíl, abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1-2x}{\mathrm{e}^{-x}} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{-\mathrm{e}^{-x}} = 0 .$$

Tedy pro $x \to -\infty$ má funkce asymptotu $y = 0$.



Příklad 7. Určete asymptoty grafu funkce $y = \mathrm{arccotg}\dfrac{1}{x}$.

Řešení: $D_f = R - \{0\}$

a) bez směrnice:

Zjistíme chování funkce v okolí bodu $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \| \operatorname{arccotg}(-\infty) \| = \pi, \quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{arccotg}\frac{1}{x} = \| \operatorname{arccotg}(+\infty) \| = 0 \quad .$$

Obě jednostranné limity jsou vlastní, proto přímka $x = 0$ není asymptotou grafu (ani zprava ani zleva). Tedy funkce nemá asymptoty bez směrnice.

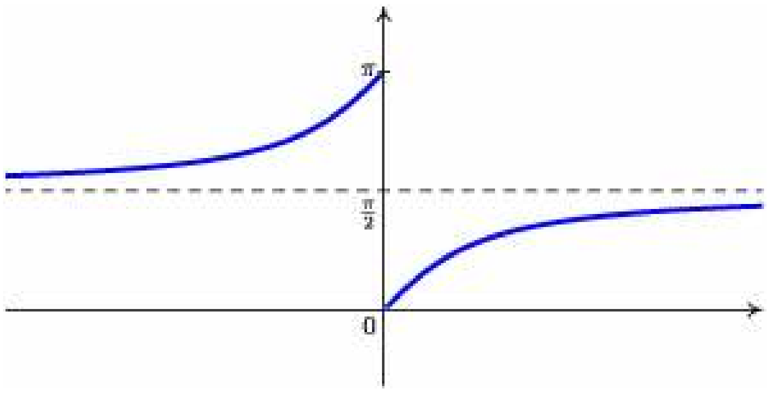
b) se směrnicí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}}{x} = \left\| \frac{\frac{\pi}{2}}{\infty} \right\| = 0 .$$

Pro $x \to -\infty$ vyjde stejně, protože $\frac{1}{x} \to 0$ pro $x \to \pm\infty$ a $\operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2}$.

$q = \lim_{x\to\infty}[f(x) - k \cdot x] = \lim_{x\to\infty}\left[\operatorname{arccotg}\frac{1}{x}\right] = \frac{\pi}{2}$. Pro $x \to -\infty$ opět vyjde stejně.

Tedy asymptota má rovnici $y = \frac{\pi}{2}$ pro $x \to \pm\infty$.



Příklad 8. Zjistěte, zda má funkce $y = \frac{\ln x}{\ln(x-2)}$ asymptoty bez směrnice.

Řešení: $D_f = (2, 3) \cup (3, \infty)$

Mohla by mít dvě asymptoty bez směrnice, v bodech $x = 2$ (zde pouze zprava) a $x = 3$, pokud bude mít v těchto bodech nevlastní limity.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln x}{\ln(x-2)} = \left\| \frac{\ln 2}{-\infty} \right\| = 0 .$$

Protože je limita vlastní, přímka $x = 2$ není asymptotou grafu.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{\ln x}{\ln(x-2)} = \left\| \frac{\ln 3}{0^-} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\ln x}{\ln(x-2)} = \left\| \frac{\ln 3}{0^+} \right\| = +\infty$$

Přímka $x = 3$ je asymptotou zprava i zleva.